# Fundamentos da Física Experimental

## Professores Márcia Muller e José Luís Fabris

**UTFPR**

## Tratamento Estatístico de Dados em Planilha Eletrônica

Dados de experimentos sujeitos a erros aleatórios podem ser tratados em planilhas eletrônicas, o que simplifica bastante o trabalho quando se dispõe de um conjunto muito grande de dados. Em particular, o valor médio $\bar{y}$ (eq. 1 da Apostila), o desvio padrão experimental $\sigma$ (eqs. 3 ou 4 da Apostila) e o desvio padrão do valor médio $\sigma_m$ (eq. 6 da Apostila) podem ser facilmente obtidos. Como exemplo, utilizaremos o software Origin para demonstrar como isto pode ser feito, com os dados do Exercício 1 da Apostila.

Digite os dados na coluna A de um *worksheet*, selecione esta coluna clicando com o botão esquerdo sobre a célula A(X), selecione a função *Analysis→ Statistic on Columns* de tal forma a obter os resultados da figura 1. (Dependendo da versão do Origin, uma alternativa é clicar com o botão **direito** sobre a célula A(X), selecione a função *Statistic on Columns* de tal forma a obter os resultados da figura 1).

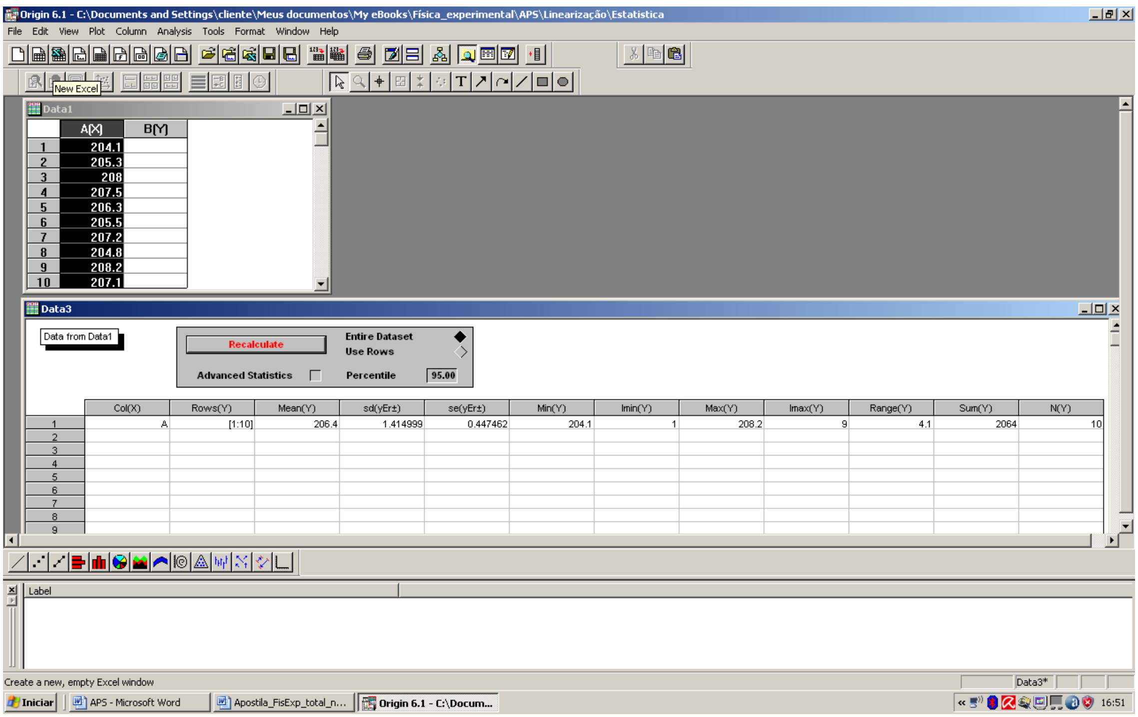


Fig. 1: Resultado da análise estatística de um conjunto de dados com o Origin.

Os diversos valores resultantes das operações são mostrados na linha 1 do novo *worksheet*.

**Questão 1**: A que corresponde cada coluna obtida no *worksheet* resultante das operações? Como se comparam os valores obtidos no exercício 1 da Apostila com os obtidos aqui?

## Relações Lineares

Uma relação linear entre duas grandezas $x$ e $y$ é aquela que pode ser matematicamente descrita pela equação de uma reta:

$$y(x) = a + bx$$

Nessa equação, $a$ é o coeficiente linear da reta e $b$ é o seu coeficiente angular. O coeficiente linear $a$ corresponde ao valor de $y$ para $x$ = 0, e indica o ponto onde a reta cruza com o eixo vertical $y$. Para dois pontos $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ que satisfazem esta equação (ou seja, que se encontram sobre a reta), o coeficiente angular pode ser obtido segundo a relação:

$$\tan\alpha = b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Um gráfico mostrando estes elementos é apresentado na figura 2.

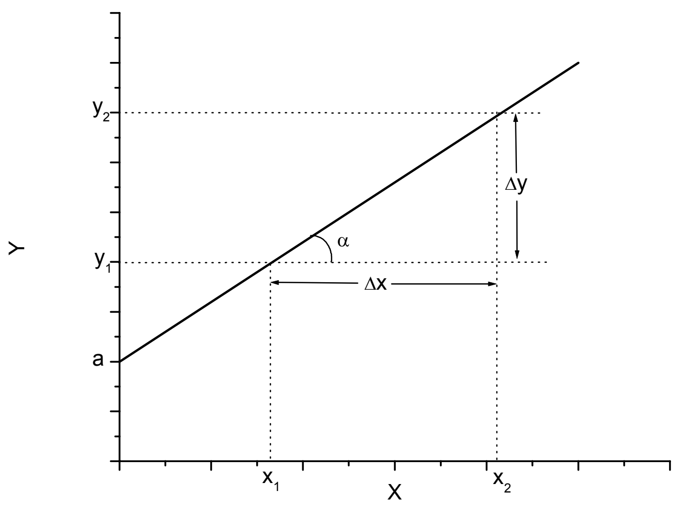


Fig. 2: Gráfico de uma função linear.

Aqui um cuidado deve ser tomado relativamente à inclinação da reta. Se os valores empregados de $\Delta y$ e $\Delta x$ forem simplesmente seus comprimentos geométricos (em centímetros, por exemplo), a inclinação da curva será a tangente trigonométrica da reta, que é uma grandeza adimensional. Esta inclinação dependerá de cada escala que for arbitrada para a construção do gráfico, e não reflete necessariamente um parâmetro físico. Se por outro lado os valores empregados para $\Delta y$ e $\Delta x$ forem lidos nos eixos Y e X do gráfico (com suas respectivas unidades associadas à grandeza física representada), a inclinação da reta (ou o coeficiente angular $b$) independerão das escalas arbitradas para a construção do gráfico, e neste caso podem representar um parâmetro físico com sua respectiva unidade. Por exemplo, imagine que um carro se desloca em movimento retilíneo uniforme, MRU. Se o eixo X contiver os tempos $t$ em segundos gastos pelo carro para percorrer certas distâncias $s$ (indicadas no eixo Y em metros), então o coeficiente angular $b$ representará a velocidade $v$ do carro (em m/s), ao passo que o coeficiente linear $a$ representará a distância inicial $s_0$ (em metros) a partir da qual as outras distâncias $s$ foram medidas (também em metros).

A função linear agora pode ser escrita como:

$$s(t) = s_0 + vt$$

e o coeficiente angular que expressa a velocidade do carro pode ser escrito como:

$$b = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Como um exemplo mais detalhado desta situação, imagine que os dados referentes à posição (medidos com um GPS) e tempo do carro em MRU coletados durante um experimento foram agrupados na tabela 1. Admite-se que o erro na medida do tempo $t$ pode ser desconsiderado, quando comparado ao erro na posição.

Tabela 1: Dados de posição contra tempo de um carro em MRU.

| Posição s (m), ± 50 m | 440 | 520 | 811 | 985 | 1325 | 1584 | 1698 | 1877 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tempo t (s) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |

O gráfico resultante dos dados acima é mostrado na figura 3, juntamente com o ajuste linear aos pontos experimentais. Deve ser observado que as coordenadas dos pontos $P_1$(77.1, 1870.0) e $P_2$(6.6, 309.3) que são empregados para o cálculo da velocidade do carro são obtidas de <u>pontos que estão sobre a reta ajustada</u> (marcados em vermelho no gráfico), e não de pontos experimentais individuais.

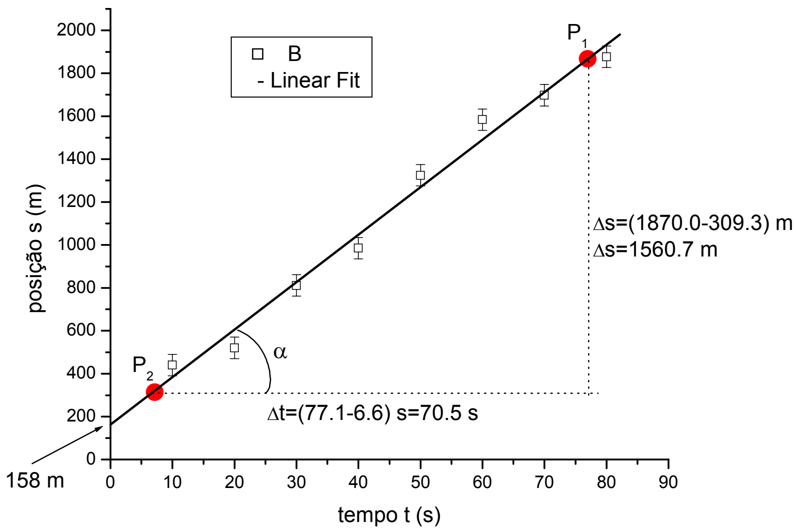


Fig. 3: Gráfico de posição contra tempo de um carro em MRU, referente aos dados da tabela 1.

Com os dados de $\Delta s$ e $\Delta t$, podemos calcular a velocidade do carro (ou a inclinação da reta), como sendo:

$$b = v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1560.7}{70.5} m/s = 22.1\, m/s$$

No gráfico é também mostrado o valor do coeficiente linear da reta, que no caso corresponde à posição inicial do carro $s_0$ = 158 m. Todos estes valores, bem como os valores dos erros associados a estes parâmetros podem ser encontrados com o ajuste linear pelo Método dos Mínimos Quadrados.

**Questão 2**: Utilize o programa gráfico Origin com os dados da tabela 1 para encontrar os valores da velocidade *v* do carro, a posição inicial $s_0$ e os erros associados.

## Linearização de Funções

Em muitos casos, a função estudada não pode ser descrita por uma relação linear to tipo $y(x) = a + bx$. No entanto, em alguns casos é possível empregar a técnica da linearização, que corresponde a uma mudança de escala de tal forma que a função estudada possa ser transformada em uma relação linear. Um exemplo típico é a expressão que relaciona o período de oscilação *T* de um pêndulo simples com o comprimento *L* do pêndulo, sob ação da aceleração da gravidade *g*. Esta relação é dada por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

O comportamento dessa curva é parabólico, de modo que não é possível o ajuste de uma reta a um conjunto de dados para determinação de parâmetros com o Método dos Mínimos Quadrados. A figura 4 apresenta este comportamento para um conjunto de valores de *T* e *L*.

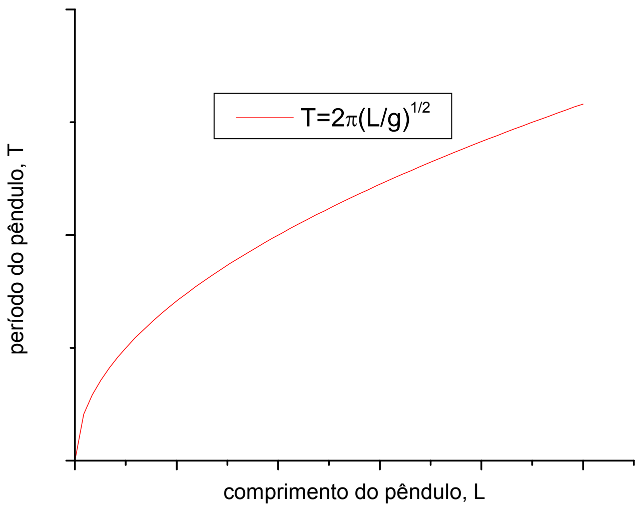


Figura 4: Comportamento parabólico do período de um pêndulo simples.

Apesar dos aplicativos gráficos computacionais apresentarem opções para ajuste de um grande número de funções matemáticas a conjuntos de dados experimentais, frequentemente é mais vantajoso aplicar o método da linearização. Para o caso específico do pêndulo, quando $L = 0$ temos $T = 0$, de modo que uma função linear que possa representar esse sistema físico deve ser uma reta com coeficiente linear $a = 0$, de forma que $y(x) = bx$. Duas são as opções que satisfazem esses requerimentos:

(a) Um gráfico de $T^2$ x $L$, que resulta numa reta de equação $T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L$ (o coeficiente angular é $b=4\pi^2/g$). Este caso foi estudado na secção 4.5 da Apostila.

(b) Um gráfico de $T$ x $L^{1/2}$, que resulta numa reta de equação $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{L}$ (o coeficiente angular é $b = 2\pi/g^{1/2}$).

**Questão 3**: Com os dados da tabela 7 da Apostila e a opção (b) de linearização descrita acima, utilize o programa Origin para encontrar o valor da aceleração da gravidade *g*, bem como seu erro. Cuidado para empregar as expressões corretas para propagação de erros.

## Mais sobre Histogramas

É possível obter histogramas com o software Origin sem a necessidade de elaborar manualmente a tabela com as divisões dos dados em faixas, como foi feito na tabela 9 do capítulo 5 da Apostila. Após inserir todos os dados numa coluna Y de um worksheet (a coluna B(Y), por exemplo), a seguinte sequência de operações deve ser realizada:

Selecionar a coluna B(Y), e usar a opção *Plot→Statistical Graphs→Histogram*. A desvantagem desse procedimento é que o valor médio pode não estar no intervalo central, como acontecia na técnica manual descrita na Apostila. Para resolver este problema, após traçar o histograma, clique com o botão direito sobre ele e selecione "*Plot Details*". Clique na aba "*Data*", desmarque a opção "*Automatic Binning*" e ajuste manualmente o "*Bin Size*", "*Begin*" and "*End*" para que o número de intervalos ("*Number of Bins*") fique adequado (ou próximo à parte inteira de $\sqrt{N}$). A cada ajuste, clique em "*Apply*" para aplicar os dados ao histograma. É possível que você precise fazer um re-escalonamento do gráfico durante a escolha dos parâmetros adequados para que o histograma seja mostrado integralmente: clique com o botão esquerdo sobre o gráfico, selecione a opção "*Graph→Rescale to Show All*".

É possível traçar também uma gaussiana sobre o histograma: após criar o gráfico, clicar com o botão da direita sobre ele, abrir *Plot Details*, selecionar a aba *Data→Curve Type: Normal→OK.*

**Questão 4**: Utilize os dados da tabela 8 da Apostila e aplique o procedimento explicado no item "Mais sobre Histogramas" para traçar o histograma e a curva gaussiana correspondente. Utilize o procedimento explicado no item "Tratamento Estatístico de Dados em Planilha Eletrônica" para calcular a média e o desvio padrão dos dados da tabela 8 da Apostila. Compare os resultados com os obtidos no experimento 8 do capítulo 8 da Apostila.

**Questão 5**: Utilize os dados do problema anterior para encontrar os parâmetros da curva gaussiana que se ajusta aos valores experimentais, e compare estes valores com os encontrados no experimento 8 da Apostila e com os resultados da Questão 4 desta APS. Para isto, realize o procedimento descrito a seguir: Após todo o procedimento que permitiu traçar o histograma, clique com o botão da esquerda em *Window→Bins* para abrir o *worksheet* com os dados da tabela de frequencias utilizados para construir o histograma (figura 5). Outra possibilidade é clicar com o botão direito sobre o histograma e depois sobre a opção *Go to Bin Worksheet*.

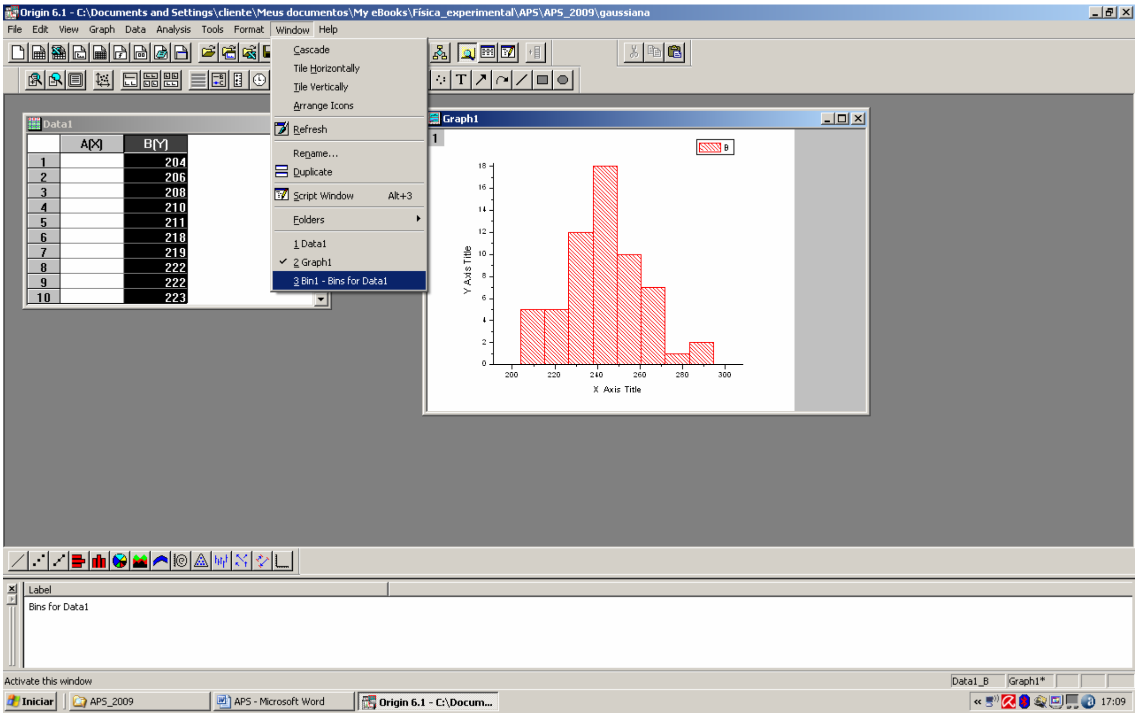

Figura 5: Tela empregada para selecionar o worksheet com os dados de frequencia utilizados na construção do histograma da Questão 4.

Na coluna BinX(X) estão os valores centrais de cada intervalo do histograma, e na coluna Counts1(Y) as frequências absolutas referentes a estes intervalos (figura 6).

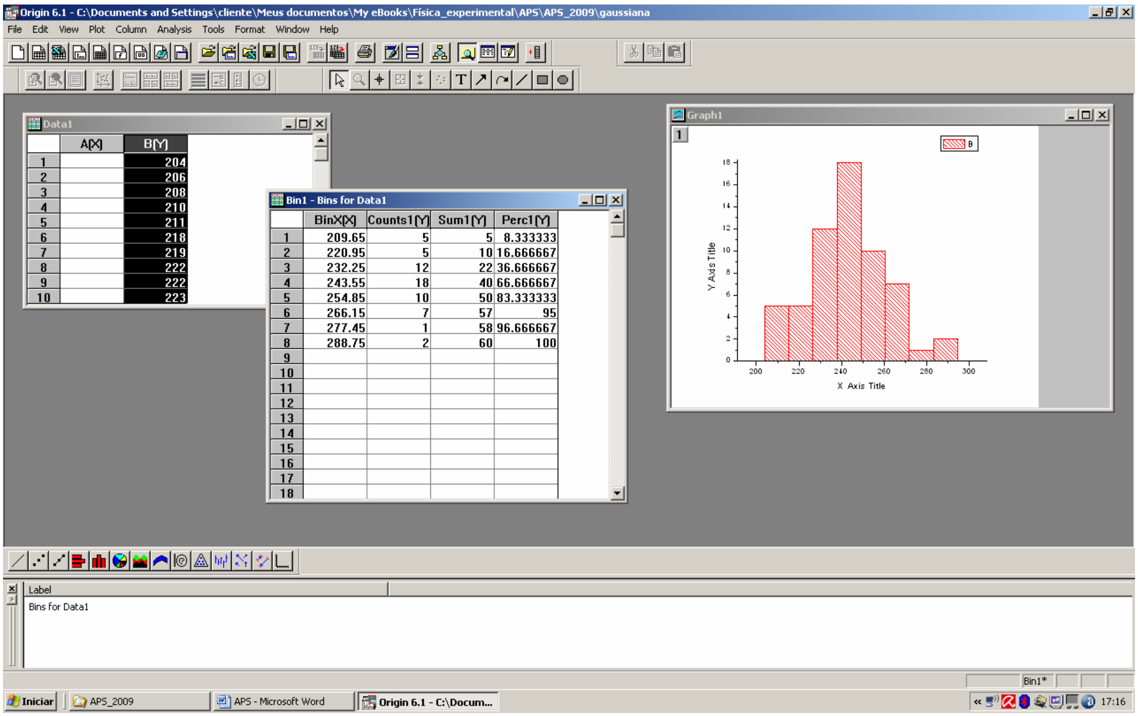

Figura 6: Tela com o worksheet com os dados de frequencia utilizados na construção do histograma da Questão 4.

Selecione estas duas colunas, faça um gráfico clicando em *Plot→Scatter*, e sobre este gráfico ajuste uma gaussiana clicando em *Analysis→Fit Gaussian*. O resultado é mostrado na figura 7.

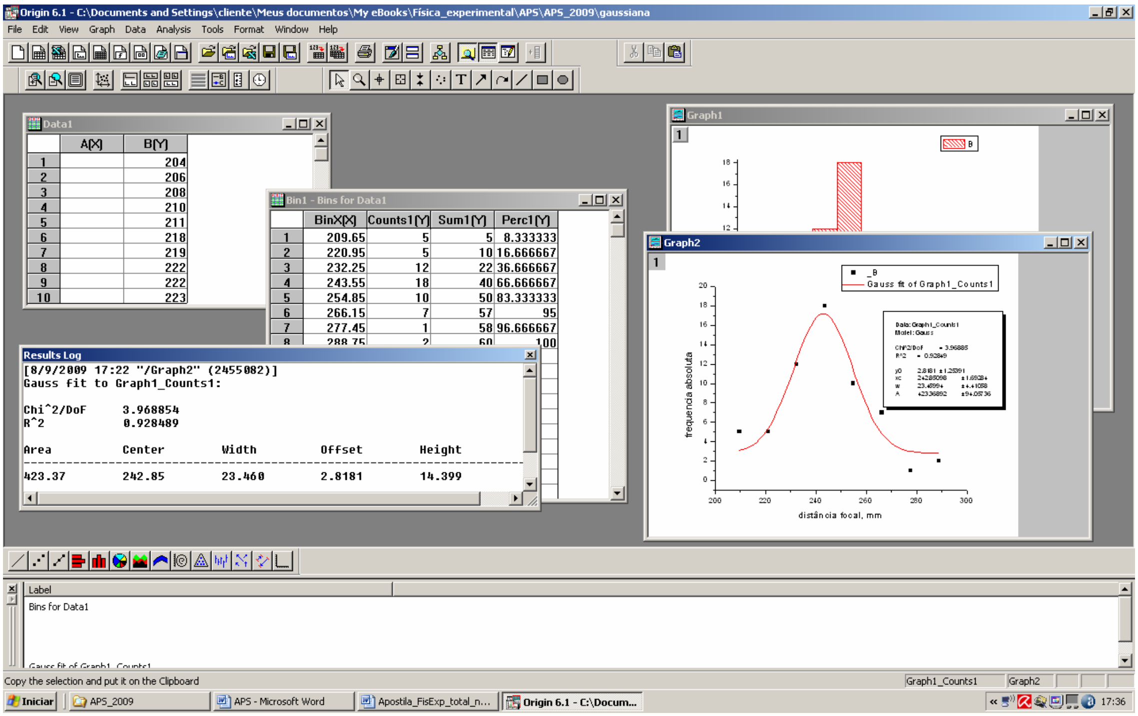

Figura 7: Tela com o o ajuste gaussiano aos dados de frequencia utilizados na construção do histograma da Questão 4.