FUNDAMENTOS DA FÍSICA EXPERIMENTAL
ATIVIDADE ACOMPANHADA REFERENTE AS AULAS DE 23 E 24 DE MARÇO

Abaixo você encontrará alguns exercícios para serem resolvidos que apresentam problemas reais de aplicação dos conceitos estudados. Resolva com atenção usando todos os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores. Lembre de fazer o tratamento estatístico adequado dos resultados experimentais calculando o desvio padrão experimental, o desvio padrão do valor médio e o desvio padrão associado com a resolução do equipamento usado (a incerteza sistemática residual) e combinando todos para obter a incerteza padrão final. Tome cuidado para garantir que as incertezas foram calculadas na mesma unidade de medição. Apresente os resultados finais adequadamente. Não esqueça de usar as regras para o número de algarismos significativos da incerteza final e para os arredondamentos e não esqueça de apresentar a unidade da medição.
Use os valores finais tratados e expressos corretamente para calcular incertezas propagadas.

1- Uma resistência elétrica é determinada com um multímetro (resolução de 0,01 A e de 0,01 V) pela medição da corrente que a atravessa e da queda da tensão entre suas extremidades. Sabendo-se que a resistência R é dada pela relação R=U/I , encontre o valor mais provável da resistência e sua incerteza. Expresse o resultado adequadamente.
Os valores obtidos experimentalmente para a corrente e a tensão são:

I (A)	0,12	0,12	0,13	0,10	0,13	0,14	0,11	0,12	0,12	0,13
U (V)	1,04	1,02	1,03	1,04	1,03	1,03	1,02	1,02	1,03	1,03

$\bar{I} = 0{,}1220000\ A$; $\sigma = 0{,}011352924\ A$; $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 0{,}003590110\ A$

Como a resolução do equipamento de medição é 0,01 A :

$\sigma_r = \frac{l_r}{2\sqrt{3}} = \frac{0{,}01}{2\sqrt{3}} = 0{,}002886751\ A$

A incerteza final σ_p será:

$\sigma_p = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_r^2} = 0{,}004606758\ A$

$$\boxed{\begin{array}{c} I = (0{,}1220 \pm 0{,}0046)\ A \\ \text{ou} \\ I = (0{,}122 \pm 0{,}005)\ A \end{array}}$$

$\bar{U} = 1{,}02900000\ V$; $\sigma = 0{,}007378648\ V$; $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 0{,}002333333\ V$

Como a resolução do equipamento de medição é 0,01 V :

$\sigma_r = \frac{l_r}{2\sqrt{3}} = \frac{0{,}01}{2\sqrt{3}} = 0{,}002886751\ V$

A incerteza final σ_p será:

$\sigma_p = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_r^2} = 0{,}003711843\ V$

$$\boxed{\begin{array}{c} U = (1{,}0290 \pm 0{,}0037)\ V \\ \text{ou} \\ U = (1{,}029 \pm 0{,}004)\ V \end{array}}$$

Usando os valores calculados de I e U podemos calcular R :

$$R = \frac{U}{I} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{1{,}0290}{0{,}1220} = 8{,}434426230\ \Omega \\ R = \frac{1{,}029}{0{,}122} = 8{,}434426230\ \Omega \end{cases}$$

Agora precisamos propagar as incertezas no valor de corrente I e no valor da tensão U para a resistência R.

$R = \frac{U}{I}$ é equivalente a equação (14) da apostila $w = \frac{x}{y}$ onde, $w = R$; $x = U$ e $y = I$. Então usamos a fórmula de propagação (15) $\sigma_w = w\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_R = R\sqrt{\left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_U}{U}\right)^2}}$

Vamos calcular para os 2 pares de valores de I e U.

1ª Situação : $R = 8{,}434426230\ \Omega$; $U = (1{,}0290 \pm 0{,}0037)\,V$; $I = (0{,}1220 \pm 0{,}0046)\,A$

$\sigma_R = 0{,}319462183\ \Omega$

$$\boxed{\begin{array}{c} R = (8{,}43 \pm 0{,}32)\,\Omega \\ \text{ou} \\ R = (8{,}4 \pm 0{,}3)\,\Omega \end{array}}$$

2ª Situação : $R = 8{,}434426230\ \Omega$; $U = (1{,}029 \pm 0{,}004)\,V$; $I = (0{,}122 \pm 0{,}005)\,A$

$\sigma_R = 0{,}347224632\ \Omega$

$$\boxed{\begin{array}{c} R = (8{,}43 \pm 0{,}35)\,\Omega \\ R = (8{,}4 \pm 0{,}3)\,\Omega \end{array}}$$

Observem que dependendo número de algarismos significativos usados para expressar as grandezas, os resultados são diferentes. Contudo, todos eles estão corretos.

Resolvi este exercício para diferentes possibilidades para que vocês observassem o que ocorre com o resultado. Vocês podem escolher uma delas no momento que estão resolvendo.

2- A massa M de um líquido e sua incerteza são determinadas pelas medições sucessivas da massa de um frasco preenchido com o líquido e pelas medições sucessivas da massa do mesmo frasco vazio. A balança utilizada tem resolução de 0,0001g. Os valores obtidos são fornecidos na tabela abaixo. Encontre o valor mais provável para a massa M do líquido e expresse o resultado adequadamente acompanhado da sua incerteza.

M_{cheio}(g)	20,4432	20,4435	20,4431	20,4433	20,4434
M_{vazio} (g)	15,3945	15,3942	15,3943	15,3941	15,3942

$\overline{M}_{cheio} = 20,4433\,0000\ g$; $\sigma = 0,000158114\ g$; $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{5}} = 0,0000707\,11\ g$

$\overline{M}_{vazio} = 15,39426\,0000\ g$; $\underbrace{\sigma = 0,000151658}_{*}\ g$; $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{5}} = 0,0000678233\ g$

$$\sigma_R = \frac{\ell_R}{2\sqrt{3}} = \frac{0,0001}{2\sqrt{3}} = 0,00002886751\ g$$

cheio : $\sigma_p = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_R^2} = 0,000076376\ g$

Vazio : $\sigma_p = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_R^2} = 0,000073711\ g$

$$\boxed{\begin{aligned} M_{cheio} &= (20,44330 \pm 0,00008)\ g \\ M_{vazio} &= (15,39426 \pm 0,00007)\ g \end{aligned}}$$

Daqui em diante estes serão os valores utilizados nos cálculos.

$$M_{líq} = M_{cheio} - M_{vazio} = 20,44330 - 15,39426 = 5,04904\ g$$

$$\sigma_{M líq} = \sqrt{\sigma_{M cheio}^2 + \sigma_{M vazio}^2} = \sqrt{0,00008^2 + 0,00007^2} = 0,0001063 = 0,00011\ g$$

$$\boxed{M_{líq} = (5,04904 \pm 0,00011)\ g}$$

* Se alguém obteve zero para este valor, utilize as fórmulas ou use uma planilha eletrônica. Provavelmente é um problema com a calculadora (Aconteceu com a minha e não sei se é um problema pontual ou do modelo de calculadora)

3- Dois resistores R_1 e R_2 foram associados em série e em paralelo. Encontre para cada caso a resistência resultante e sua incerteza. Expresse o resultado adequadamente.
Dados: $R_1 = (20,0 \pm 1,0)\ \Omega$ e $R_2 = (300 \pm 15)\ \Omega$

Associação em série: $R = R_1 + R_2 \Rightarrow R = 20,0 + 300 = 320,0\ \Omega$

Usando a equação de propagação (11):

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_2}^2} = \sqrt{1,0^2 + 15^2} = 15,03329638\ \Omega$$

$$(320 \pm 15)\,\Omega$$

Associação em paralelo:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Podemos reescrever a equação para a associação em paralelo como:

$$\frac{1}{R} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \Rightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1} = \frac{20,0 \times 300}{20,0 + 300} \Rightarrow \boxed{R = 18,75000\ \Omega}$$

$\sigma_R = ?$

$R = \dfrac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}$ (Chamando: $R_1 R_2 = x$; $R_2 + R_1 = y$; $R = w$ temos $w = \dfrac{x}{y}$

que é uma das equações (14). Portanto a incerteza propagada será dada pela equação (15). $\sigma_w = w\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$

Então: $\sigma_R = R\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_y}{y}\right)}$ (I)

Temos que continuar propagando incertezas pois não conhecemos as incertezas em x e y.

$x = R_1 R_2$. Usamos novamente (15)

$$\sigma_{R_1R_2} = R_1R_2\sqrt{\left(\frac{\sigma_{R_1}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_2}}{R_2}\right)^2} \qquad (II)$$

$y = R_2 + R_1$

Usando a equacão de propagacão (II):

$$\sigma_{R_1+R_2} = \sqrt{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_2}^2} \qquad \text{(III)}$$

Como estamos interessados na incerteza propagada para R, substituímos (III) e (II) em (I):

$$\sigma_R = R\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

$$\sigma_R = R\sqrt{\left(\frac{\sigma_{R_1R_2}}{R_1R_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_1+R_2}}{R_1+R_2}\right)^2} = R\left\{\frac{\sigma_{R_1R_2}^2}{(R_1R_2)^2} + \frac{\sigma_{R_1+R_2}^2}{(R_1+R_2)^2}\right\}^{1/2}$$

$$\sigma_R = R\left\{\frac{\cancel{(R_1R_2)^2}\cdot\left[\left(\frac{\sigma_{R_1}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_2}}{R_2}\right)^2\right]}{\cancel{(R_1R_2)^2}} + \frac{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_2}^2}{(R_1+R_2)^2}\right\}^{1/2}$$

$$\sigma_R = R\left\{\left(\frac{\sigma_{R_1}}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{R_2}}{R_2}\right)^2 + \frac{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_2}^2}{(R_1+R_2)^2}\right\}^{1/2}$$

Já podemos substituir os valores e calcular σ_R:

$$\sigma_R = 18{,}75\left\{\left(\frac{1{,}0}{20{,}0}\right)^2 + \left(\frac{15}{300}\right)^2 + \frac{1{,}0^2 + 15^2}{(20{,}0+300)^2}\right\}^{1/2}$$

$$\sigma_R = 0{,}8833419\ \Omega$$

$$\boxed{R = (18{,}75 \pm 0{,}88)\ \Omega}$$